

Portefeuille de réplication

Impact de l'omission d'un facteur de risque sur la stabilité temporelle

SACEI

-

04 Octobre 2013

Marc Juillard

Actuaire manager, expert ERM

Responsable R&D

Marc.juillard@sia-partners.com

Clément Pravin

Actuaire manager

Clement.pravin@sia-partners.com

Contexte

Objet de la présentation

- ❑ On considère une compagnie d'assurance commercialisant un contrat d'épargne en euro, qui sous le pilier 1, gère :
 - son besoin de fonds propres sur la base de la formule standard ;
 - les risques actions et risques de taux sur la base d'un GSE ;
 - la problématique des obligations *corporates* sur la base d'une mécanique d'abattement des coupons.

Dans le cadre de ses travaux Pilier 2, la compagnie souhaite approximer la déformation de son ratio de couverture (en vision prospective et en cas de stress sur les marchés) sur la base d'un portefeuille de réplication.

- ❑ **Elle cherche alors à déterminer si le niveau de complexité retenu dans le cadre de ces travaux pilier 1 (absence de prise en compte de la volatilité du risque de crédit) est suffisant lors de la mise en place du portefeuille de réplication** (notamment pour minimiser le problème de stabilité temporelle de ce type d'approche).

On considère dans la suite de la présentation que l'intégralité des risques sont couvrables (dans la réalité ce point sera à discuter et pourra conduire à privilégier une approche *LSMC* ou *Curve Fitting*).

Contexte

Rappel des principes *Least Square Monte Carlo* et Portefeuille de Réplication

Portefeuille de Réplication

Si l'on se place sous un marché complet, il est possible de répliquer tout instrument financier P_t par une portefeuille autofinancé (X_0, \dots, X_M) et un vecteur de processus adaptés (W_0, \dots, W_M)

$$P_t = \sum_{i=1}^M w_i^t X_i^t$$

Least Square Monte Carlo

L'espace $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ muni de la covariance comme produit scalaire est un espace de Hilbert. Ainsi tout élément $E[X|Y]$ peut s'exprimer à partir de ses coordonnées exprimées dans la base de Hilbert de $L^2(Y)$

$$E[X|Y] = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i(Y)$$

Cadre assurantiel

On admet couramment l'existence de 2 processus markovien Y_t et D_t décrivant respectivement les risques impactant le passif et l'état des polices. Aussi la problématique se situe au niveau du calcul de la dynamique de l'espérance conditionnelle suivante :

$$BEL_t = E^{\mathbb{Q} \otimes \mathbb{P}} \left(\sum_{j \geq t} \frac{\delta(j)}{\delta(t)} \times X_j \mid Y_{t-1}, D_{t-1} \right)$$

La transposition de ces 2 méthodes au cadre assurantiel consiste à déterminer un panier d'actif (ou un polynôme appliqué à un ensemble d'aléa) présentant la même dynamique que le *best estimate*.

Cependant, les particularités des passifs d'assurance (nombreux facteurs de risques rendant la dynamique des passifs complexe et partiellement couvrable) conduisent à modifier le cadre théorique associé à ces méthodes :

- **résultat approché et non exacte ;**
- **stabilité temporelle non vérifiée.**

Contexte

Impact du passage au cadre assurantiel

Perte de la stabilité temporelle

↳ Méthodologie des portefeuilles de répliation

- **Taille de la somme** : le niveau de complexité des contrats d'assurances ne permet pas de définir précisément le terme M.
- **Pondération** : les processus adaptés sont remplacés par des constantes.

↳ Méthodologie des Least Square Monte Carlo

- **Taille de la somme** : on se limite aux M premiers termes.
- **Construction de la base** : la base retenue est rarement orthogonale.

Limite du pouvoir de répliation

↳ Méthodologie des portefeuilles de répliation

La présence de risques non couvrables (type risques biométriques) invalide l'utilisation de portefeuille de répliation pour certains types de passifs.

↳ Méthodologie des Least Square Monte Carlo et des Least Square Monte Carlo

Les règles comptables (consommation de la PPE, Réserve de Capitalisation, PDD, PRE, ...) induise un phénomène de volatilité qui ne peut être couvert ou répliquer sur la base d'aléa.

⚠ Dans le cadre assurantiel, la méthodologie des portefeuilles répliquant ne vise à définir un portefeuille de couverture !

- Les produits financiers peuvent donc être fictifs,
- Les problèmes de liquidité et de frais financiers ne sont pas prises en compte.

⚠ Travailler sur le *best estimate* nécessite de tenir compte de l'effet de levier !

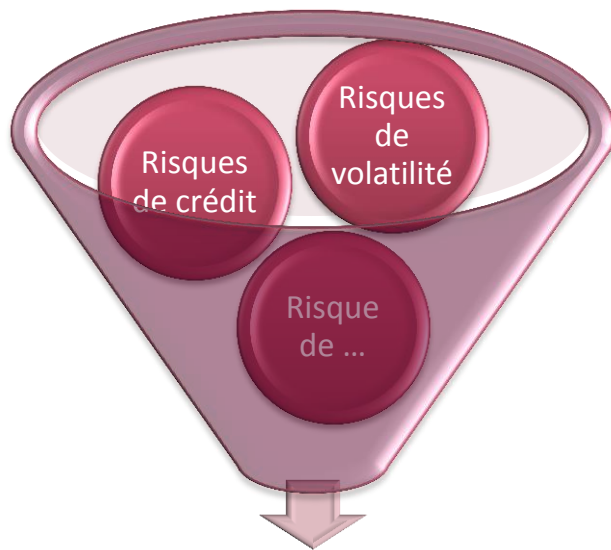
Cadre Méthodologique des portefeuilles de réplication (1/4)

Schéma global

Impact méthodologique (dans le cadre de risques répliquables)

La perte de la stabilité temporelle est minimisée lors de l'ajustement des proxies : **ajout d'un certain nombre de contraintes sensées modéliser les conditions de marché où l'on souhaite que le proxy soit toujours valide (i.e. biais maîtrisé).**

① Analyse des risques majeurs



Ajustement d'un GSE captant la volatilité de ces risques

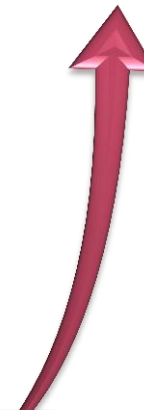


② Construction des contraintes

Construction de scénarios de stress qui sont injectées en tant que contrainte dans l'ajustement du proxy

③ Ajustement du proxy

Proxy



- Le proxy ne peut pas fournir une information plus fine que le GSE !

Cadre Méthodologique des portefeuilles de réplication (2/4)

Ajustement de l'asset mixt et construction des scénaris de stress

Sélection des actif candidats initiaux

On se limite aux instruments vanilles dont les prix peuvent êtres évalués à partir de formules fermées. Ceci diminue la capacité de réplication mais s'avère nécessaire du point de vu opérationnel

Instruments financiers	Maturité	Strike	Pouvoir répliquant
Obligations zéro-coupon	3, 4, 6, 7, 8, 9, 10	-	ε_{Taux}
Calls sur action	1, 2, 3, 4, 10	100%	$\varepsilon_{Eq} \varepsilon_{Eq}^2$
Swaptions	1, 3, 4, 5	1%	ε_{Taux}^2
CAP	1, 3, 4, 5	1%	ε_{Taux}^3

Ajustement des scénarios de stress

Etape délicate dans le sens où au-delà de la volatilité des facteurs de risques, c'est l'impact sur la volatilité des passifs qui nous intéresse. Diverses possibilités sont envisageables :

Méthode	Rapide	Prise en compte de l'impact sur les passifs	Contra-cyclique
Retenir les scénarios de stress qui sortent du GSE	Oui	Non	Non
Retenir les scénarios de stress qui sortent d'une approche SdS	Non	Oui	Non
Se baser sur une étude de l'historique des facteurs de risques	Oui	Non	Oui

Cadre Méthodologique des portefeuilles de réplication (3/4)

Les idées clés et la procédure de la validation

$$\text{Ajustement de : } cf_{passif}(t) \approx \sum_{k=1}^N cf_{RP}^k(s, t)$$

Les points clés:

1. Choix des actifs candidats $\{A_k\}_k$, on note $cf_{RP}^k(s, t)$ le cash flow délivrés à la date t dans la simulation s
Défini *a priori* en analysant la nature des options incluses dans les passifs (et donc la convexité). Ces derniers peuvent être fictifs, la seule contrainte imposée étant de pouvoir les valoriser par des formules fermées ou par des approches numériques peu chronophages).
2. Le calcul du poids de chaque actif dans le portefeuille répliquant; La méthode des moindres carrés pondérés est très répandue :

$$(w'_1, \dots, w'_N) = \text{Argmin} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^n \left(cf_{passif}(s, t) - \sum_{k=1}^N w_k cf_{RP}^k(s, t) \right)$$

3. Afin de maintenir la stabilité temporelle du proxy, des contraintes sont ajoutées :

$$\left\{ \left| \frac{L(0) - RP(0)}{L(0)} \right| \leq \varepsilon ; \left| \frac{L_{Choc i}(0) - RP_{Choc i}(0)}{L_{Choc i}(0)} \right| \leq \varepsilon_i \right\}$$

Cadre Méthodologique des portefeuilles de répliation (4/4)

Processus de validation de l'*asset mixt*

Validation de la forme paramétrique

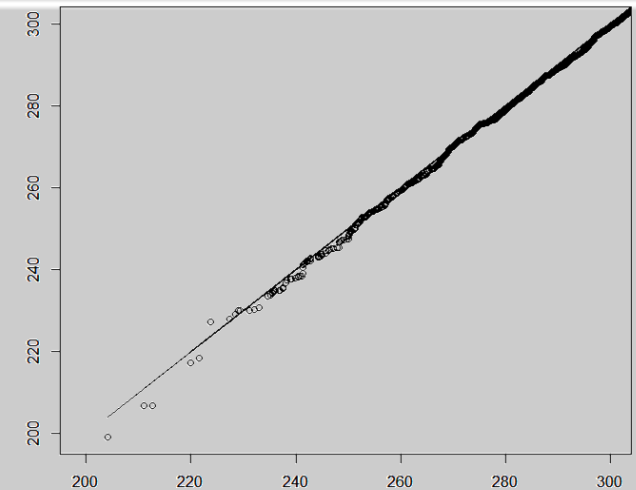
La sélection de modèle peut s'effectuer de 3 façons : sélection *forward*, élimination *backward*, mixte

Application d'un critère permettant de mesurer la qualité de répliation de la forme paramétrique.

- R^2 : fonction non décroissante du nombre de variables explicatives et sensible aux points aberrants.
- R^2 ajusté : il s'agit du R^2 ajusté du nombre de variables explicatives.
- Critères de vraisemblance pénalisée : BIC ou AIC (pénalise le sur-pamétrage) .
- Autre (Cp de Mallows, ...) .

Exemple retenu

- Méthode SVD
- Sélection de modèle basée sur le critère du R^2 ajusté.
- combiné à une analyse Q-Q plot
- Tests statistiques sur les résidus, significativité des coefficients de la régression.
- Vérification du respect des contraintes.



Présentation de l'exemple retenu

Présentation du passif

- Un contrat d'épargne en euro :**
 - TMG de 1%
 - Taux de 85%
 - Taux de frais de gestion de 0,5%

Modélisation des risques comportementaux

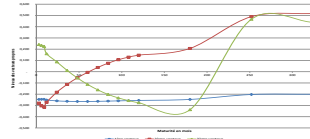
- Rachats conjoncturels :**
 - Taux cible : OAT 10 ans
 - Application de la loi ACP (ONC)

Modélisation des risques

- Gestion de la prime de risque**
 - Primes de risque implicite
- Contraintes imposées au GSE**
 - Etre « Market Consistent » sur les taux Swap
 - Présenter un compromis « volatilité vs pragmatisme ».

Générateur de Scénarios Economiques

- Les modèles implémentés en risque neutre**
 - Action : Black & Sholes
 - Taux nominaux : H&W à 1 facteur calibré sur à partir de prix de taux Swap
 - Risque de Crédit : Modèle LMN calibré sur les CDS d'une obligation A

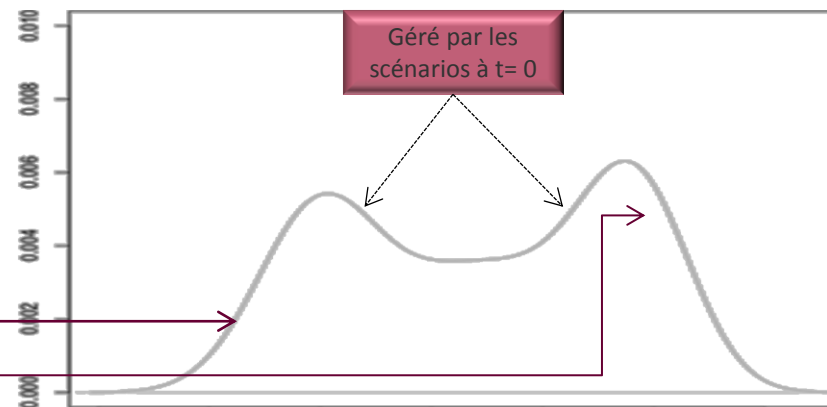


Construction des contraintes (1/2)

Principe de construction

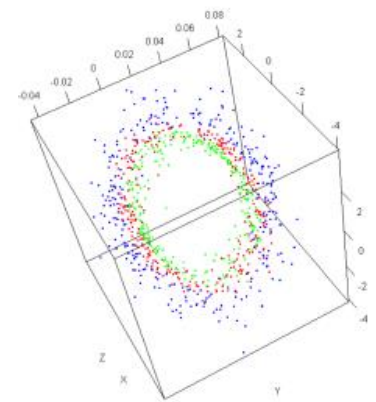
- Si dans des conditions de volatilité mesurées, les simulations effectuées à t=0 assurent la stabilité du portefeuille répliquant, elles ne permettent pas d'obtenir un proxy suffisamment stable.

Pour pallier ce problème, on définit un ensemble de scénarios correspondant à un maillage des conditions de marché stressées pour les 12 prochains mois. Il s'agit donc d'une approche cohérente avec la technique du *Curve Fitting*.



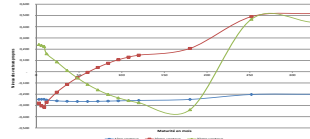
- Dans le cas des scénarios associés aux quantiles de valeurs élevés, les scénarios peuvent être réalisés sur la base d'une norme traduisant la sensibilité de la VIF à la réalisation d'aléas de niveau élevés.

$$\text{Norme appliquée : } ||(\zeta_{Ac}, \zeta_{Tx}, \zeta_{Immo})|| = \sqrt{\text{Sensi}_{Tx} * \zeta_{Tx}^2 + \text{Sensi}_{Ac} * \zeta_{Ac}^2 + \text{Sensi}_{Spread} * \zeta_{SPread}^2}$$



- In fine on retient de 6 scénarios correspondant aux conditions de marché associées aux quantiles à 0.5%, 5%, 20%, 80%, 95% et 99.5% à un an. Ces derniers permettent en outre de tenir compte des effets croisés et de la sensibilité des passifs aux facteurs de risques financiers.

⚠ Le nombre de scénarios et leur nature (stand alone vs croisés) dépend de la complexité des passifs.



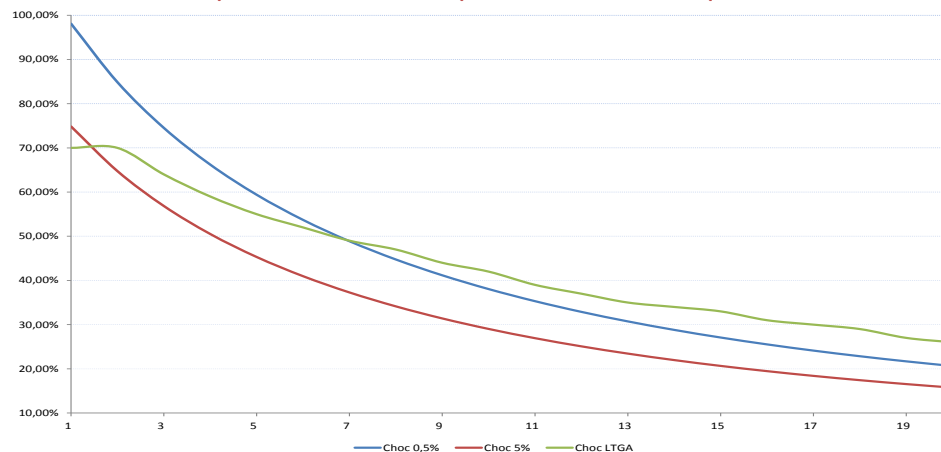
Construction des contraintes (2/2)

Réconciliation avec la Formule Standard

D'une manière synthétique les différents scénarios indiquent :

- Des chocs de taux à la hausse cohérents avec la FS.
- Un choc de *spread stand alone* cohérent avec la FS (11% contre 10,5%).

Comparaison des scénarios choqués avec le stress LTGA : risque de taux



Analyse critique des scénarios de stress de taux

Un modèle de taux qui ne permet de capter que 88% de la volatilité du risque de taux (seuls les mouvements de translation de la courbe des taux sont captés).

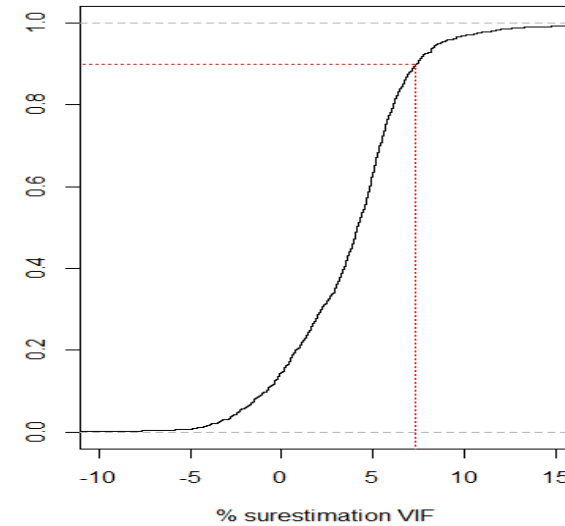
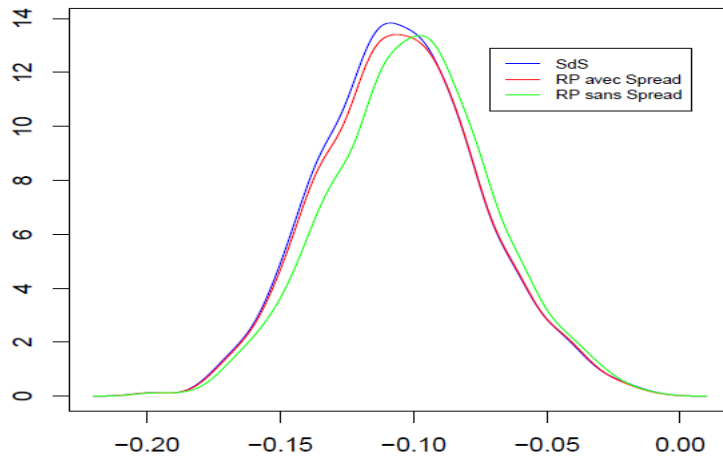
Ajout d'une procédure de réconciliation avec l'historique des taux à 1 an [2000 – 2011] :

- dans 0,5% des cas les taux ont progressés sur 12 mois de 80% (98% dans le scénario à 99,5%)
- dans 5% des cas les taux ont progressés sur 12 mois de 59% (75% dans le scénario à 95%)
- dans 0,5% des cas les taux ont dépassé les 5,38% (2,16% dans le scénario à 99,5%)
- dans 5% des cas les taux ont dépassé les 5,1 % (1,91% dans le scénario à 95%)

Vecteur propre	Part de variance expliqué	Variance cumulée
1	88,06%	88,06%
2	6,80%	94,86%
3	4,56%	99,42%
4	0,46%	99,88%

Ajout du procédure de validation du RP pour ces niveaux de taux

Le RP sans le risque de *spread* conduit à surestimer la richesse de la compagnie dans un an.



Une analyse de la fonction de répartition de l'écart entre l'approche SdS et l'approche par portefeuille répliquant n'intégrant pas la volatilité du risque de *spread* indique que dans 10% des cas, le proxy conduira à surestimer la richesse à 1 an de plus de 7%.

Biais moyen	VaR10% du biais	TVaR10% du biais
3,8%	7,4%	10%

Aussi gérer le risque de *spread* par abattement des coupons (notamment au niveau de la construction des contraintes) conduit à diminuer fortement la stabilité temporelle du proxy.

Conclusion

L'étape cruciale associée à la mise en application des méthodes par proxies en assurance se situe au niveau de la construction des contraintes qui définissent:

- le niveau de stabilité temporelle de la forme paramétrique
- les zones de stress à partir desquelles le proxy devra être recalibré.

Dans le cas des risques financiers, la prise en compte du risque de crédit dans la définition des contraintes constitue ainsi un cadre minimal.

Une analyse du poids de la volatilité des risques considérés sera également à mener. Ainsi dans le cas où l'on ajoute du risque immobilier une méthodologie approchée pourra être envisagée (approche proportionnelle et définition de zones de stress basé sur l'historique).

In fine, on observe que **la problématique pluri-annuelle est étroitement liée à la problématique infra-annuelle** : les scénarios de stress retenus dans l'ajustement du proxy doivent a minima être pris en compte lors du calcul du Besoin Global de Solvabilité.

Annexe

Least Square Monte Carlo et Portefeuille de Réplication : points de convergence et de divergence

1. On se place sous $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ et on note P_t le prix d'un instrument financier quelconque

Muni de la covariance comme produit scalaire $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ est un espace de Hilbert. Ainsi tout élément P_t peut s'exprimer de la sorte :

$$P_t = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i^t(\Omega)$$

Il s'agit du cadre initial associé à la méthode LSMC

2. On considère que les résultats obtenus par une approche de type Monte Carlo constitue la réalité.
3. On considère que l'ensemble des risques sont couvrables.

Cette 2^{ème} hypothèse revient à considérer que la probabilité risque neutre retenue sous Monte Carlo est la seule mesure risque neutre du marché : Ω est donc considéré comme un marché complet. Aussi P_t peut être valorisé sur la base des prix d'actif d'Arrow-Debreu :

$$P_t = \sum_{i=1}^{\infty} R_i \pi_i$$

La notion de complétude implique également qu'il est possible de répliquer P_t par une portefeuille autofinancé (X_0, \dots, X_M) . Le passage d'une somme infinie à une somme finie implique cependant de retenir des processus adaptés comme pondération :

$$P_t = \sum_{i=1}^M w_i^t X_i^t$$

Il s'agit du cadre initial associé à la notion de portefeuille de réplication

↳ Les portefeuilles de réplication et les LSMC présentent un cadre mathématique commun et conduisent aux mêmes résultats tant que les hypothèses initiales sont vérifiées. Ces dernières assure également la stabilité temporelle des 2 méthodes.